208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Cadre : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Généralités

1) Espaces vectoriels normés

Définition 1. On appelle norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

On note $(E, \|.\|)$ l'espace E muni d'une norme $\|.\|$, on parle d'espace vectoriel normé.

On fixe par la suite une norme $\|.\|$ sur E.

Exemple 2. *Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a les normes classiques :*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad et \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad et \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Remarque 3. *L'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E.*

Définition 4. Deux normes $\|.\|_A$ et $\|.\|_B$ sont équivalentes lorsque :

$$\exists\, a, b > 0, \quad \forall\, x \in E, \quad a \|x\|_A \leqslant \|x\|_B \leqslant b \|x\|_A$$

Exemple 5. *Sur $\mathbb{R}$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.*

Exemple 6. *Sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, ces normes ne sont pas équivalentes :*

$$\|.\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| \, dt \quad et \quad \|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Proposition 7. *Si V est un sous-espace vectoriel de $(E, \|.\|)$, alors $\overline{V}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. En particulier, un hyperplan de E est fermé ou dense.*

2) Applications linéaires continues

On fixe $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Théorème 8. *Soit $f : E \to F$ linéaire. Sont équivalents :*

(i) f continue sur E.

(ii) f continue en 0.

(iii) f bornée sur $\overline{B(0,1)}$.

(iv) f bornée sur $Sph(0,1)$.

(v) $\exists M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$

(vi) f lipschitzienne.

(vii) f uniformément continue sur E.

Définition 9. L'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$, noté $\mathcal{L}(E, F)$, est naturellement muni d'une norme par :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F$$

Remarque 10. *La norme $|||f|||$ de f est son rapport de Lipschitz.*

Définition 11. Si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E'. Il s'agit d'un sous-espace de $E^\star$, qu'on appelle dual topologique de E.

Proposition 12. *Pour $f \in E^\star$, on a $f \in E'$ si, et seulement si,* $\operatorname{Ker} f$ *est un hyperplan fermé de E.*

Exemple 13. *Dans l'espace $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_1)$, l'application $f \mapsto f(0)$ et une forme linéaire discontinue.*

Théorème 14 (Hahn-Banach analytique)**.** *Soit $p : E \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in E, \forall \lambda > 0, \, p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad et \quad \forall x, y \in E, \, p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$$

Soit G un sous-espace vectoriel de E et $g \in G^\star$ tels que $g \leqslant p$ sur G. Alors il existe $f \in E^\star$ prolongeant g et telle que $f \leqslant p$ sur E.

Corollaire 15. *Soient G est un sou-espace vectoriel de E et $g \in G'$, alors il existe $f \in E'$ prolongeant g et telle que $|||f||| = |||g|||$.*

Corollaire 16. *Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = \sup_{f \in \overline{B_{E'}(0,1)}} |f(x)|$.*

Proposition 17. *Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, et soient $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et on a $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \, |||f|||$.*

3) Cas de la dimension finie

Ici, on suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 18. *Toutes les normes sur E sont équivalentes*

Corollaire 19. *Si F est un espace vectoriel, toute application linéaire $E \to F$ est continue.*

Corollaire 20. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel est fermé.*

Corollaire 21 (Heine-Borel)**.** *Les parties compactes de E sont exactement les parties fermées bornées.*

Contre-exemple 22. *Dans $E = (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$, la boule unité fermé est fermée et bornée, mais n'est pas compacte.*

Remarque 23. *Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie.*

Théorème 24 (Riesz)**.** *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermé est compacte si, et seulement si, il est localement compact.*

II Cas des espaces de Banach

1) Généralités

Définition 25. On dit que $(E, \|.\|)$ est espace de Banach s'il est complet.

Théorème 26. *$(E, \|.\|)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série absolument convergente de E est convergente.*

Proposition 27. *Si F est un Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un Banach.*

Théorème 28. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 29. *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un espace de Banach.*

Proposition 30. *L'espace $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, si on le munit de la norme $\|f\| = \sum_{i=0}^k \left\|f^{(i)}\right\|_\infty$, est un espace de Banach, contrairement à si on le munit de la norme $\|.\|_\infty$.*

2) Théorème de Baire et applications

Théorème 31 (Baire)**.** *Soit E un espace métrique complet. Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide.*

Corollaire 32. *Soit E un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Application 33. *Un espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable. Par exemple $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.*

Théorème 34 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs continus de E dans F. On suppose que, pour tout $x \in E$, $\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < +\infty$. Alors $\sup_{i\in I} \|u_i\| < +\infty$.*

Application 35. *Il existe des fonctions continues et 2π-périodique qui diffèrent de leur série de Fourier.*

Théorème 36 (Application ouverte)**.** *Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.*

Corollaire 37. *Une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach est d'inverse continue*

Théorème 38 (Graphe fermé)**.** *Une application linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces de Banach est continue si, et seulement si, son graphe $\{(x, T(x)) \,|\, x \in E\}$ est fermé pour la norme produit.*

III Cas des espaces de Hilbert

Définition 39. Un espace vectoriel est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire. S'il est complet pour la norme issue du produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert (ou hilbertien).

Exemple 40. *$(L^2, \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.*

Proposition 41. *Un espace vectoriel normé E est un espace préhilbertien si, et seulement si, $\|.\|$ vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Proposition 42 (Cauchy-Schwarz)**.** *Si H est préhilbertien, alors :*

$$\forall\, x, y \in H,\ |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

Définition 43. Pour une partie A de H, son orthogonal est défini par $A^{\perp} = \{x \in H \,|\, \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\}$.

Proposition 44. *Si $A \subseteq H$, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé.*

Théorème 45. *Pour tout $f \in H$, il existe un unique élément de K, noté $P_K(f)$, et appelé projection de f sur K, tel que :*

$$\|P_K(f) - f\| = \inf_{v \in K} \|v - f\|$$

De plus, $P_K(f)$ est caractérisée par :

$$\forall v \in K,\ \langle f - P_K(f), v - P_K(f)\rangle \leqslant 0$$

Corollaire 46. *Soient M un sous-espace vectoriel fermé de H et $f \in H$. Alors $P_M(f)$ est caractérisé par :*

$$P_M(f) \in M \qquad \text{et} \qquad \forall\, v \in M,\ \langle f - P_M(f), v\rangle = 0$$

De plus, P_M est un opérateur linéaire.

Théorème 47 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que :*

$$\forall\, v \in H,\ \langle \varphi, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

Application 48. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert H, alors $F \oplus F^{\perp} = H$*

Application 49. *Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $u^{\star} \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$\forall\, x, y \in H,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{\star}(y)\rangle \quad \text{avec} \quad \|u\| = \|u^{\star}\|$$

Proposition 50. *Un sous-espace vectoriel F de H est dense si, et seulement si, $F^{\perp} = \{0\}$.*

Développements

- Théorème de Riesz-Fischer (29) [Bre87]
- Projection sur un convexe fermé et théorème de Riesz (45,46,47) [Bre87]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson